Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН

для учащихся инженерных классов (11 класс) города Москвы

Консультация «Решение задач по теоретической части предпрофессионального экзамена» (Математика)

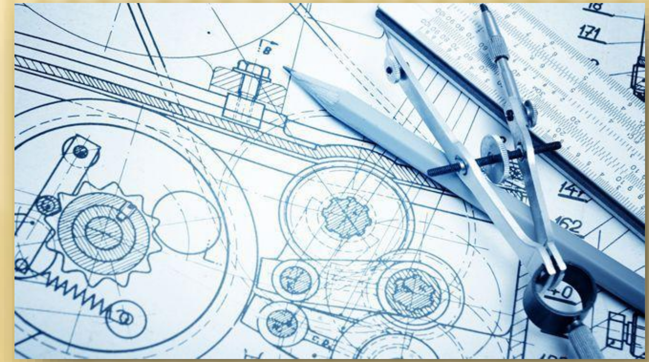
Авторы: ***Власова Е.А.***, *к.ф.-м.н., доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им Н.Э. Баумана*

Москва – 2019

Предпрофессиональный экзамен

Теоретическая часть:

- направлена на проверку освоения базовых умений и практических навыков при решении межпредметных и метапредметных задач;
- включает расчетные задачи и межпредметные задания на анализ текстовой, знакосимвольной и графической информации, базирующиеся на элементах содержания курсов **физики**, **информатики**, **химии**, биологии и **математики** базового, повышенного и высокого уровней сложности различной направленности.



Теоретическая часть – компьютерная проверочная работа

Каждому учащемуся инженерного класса предоставляется:

- автоматизированное рабочее место;
- электронный модуль проверки сформированной экзаменационной работы в автоматическом режиме из банка заданий при регистрации участника в электронной базе;
- получение результатов сразу после проведения работы в автоматическом режиме.

Условия проведения и время выполнения проверочной работы

- Теоретическая часть предпрофессионального экзамена проводится в форме компьютерного тестирования.
- При выполнении работы обучающиеся могут пользоваться непрограммируемым калькулятором, таблицей физических величин и периодической таблицей химических элементов Д.И. Менделеева.
- На выполнение теоретической части экзаменационной работы отводится **90 минут**.

Структура экзаменационной работы

- Вариант экзаменационной работы автоматически формируется из базы проверочных заданий в соответствии с планом экзаменационной работы и состоит из **15 заданий**.
- Вариант состоит из **двух частей**.
- **Часть 1** включает текст по естествознанию и 3 задания к нему и является **обязательной** для выполнения каждым экзаменуемым.
- **Часть 2** включает 12 заданий, соответствующих направлению практической части.

Структура экзаменационной работы

Для получения **максимального балла** экзаменуемый должен выбрать и выполнить **8 заданий части 2**. Задание считается выбранным, если на него дан ответ. Экзаменуемый может изменить свой выбор в процессе выполнения работы путем удаления ответа к одному заданию и сохранения ответа к другому заданию. **Возможность выбора более 8 заданий части 2 не предоставляется.**

Система оценивания отдельных заданий и работы в целом

- За выполнение **задания 1** выставляется **2 балла**, если ответ обучающегося совпал с эталоном; **1 балл**, если неверно указан 1 символ; или **0 баллов** в других случаях. За верное выполнение каждого из **заданий 2-3** – **1 балл**. **Максимальный балл за часть 1** – **4 балла**.
- Каждое выполненное задание **части 2** оценивается в **2 балла**. Задание считается выполненным, если ответ совпал с эталоном. **Максимальный балл за часть 2** – **16 баллов**.
- **Максимальный балл за выполнение всей работы** – **20 баллов**, даже если технический балл, складываемый из баллов за отдельные задания, превышает 20.

План демонстрационного варианта теоретической части экзаменационной работы

Направление практической части: «Исследовательское», «Технологическое», «Конструирование», «Программирование»

№ задания	Проверяемые умения
Часть 1	
1	Использование явно заданной в тексте информации для анализа
2	Использование явно заданной в тексте информации для расчетов
3	Анализ информации, заданной графически
Часть 2	
4	Проведение логических рассуждений для нахождения характеристик событий
5	Использование знаково-символьных моделей при решении задач
6	Использование знаково-символьных моделей при решении задач
7	Проведение экстремальных оценок
8	Использование знаково-символьных моделей при решении задач
9	Преобразование модели из одной системы представления в другую
10	Использование явно заданной информации для проведения расчетов
11	Проведение расчётов параметров кинематического устройства
12	Анализ графической информации
13	Решение задач на индукционное представление информации
14	Использование знаково-символьных моделей при решении задач
15	Использование явно заданной информации для проведения расчетов

Демонстрационный вариант теоретической части экзамена (часть 2)

Часть 2

4 Некоторое количество беговых роботов соревновалось в беге по кольцевой трассе. Роботов выпускали соревноваться попарно. Каждая пара начинала бег с общего старта одновременно и в одном направлении. Забег считался завершенным в тот момент, когда роботы вновь оказывались рядом. В протоколе фиксировалось время, в течение которого проходил каждый из забегов. Всего в протоколе было сделано 36 записей. Известно, что в ходе забегов каждый робот соревновался с каждым ровно один раз, скорости всех роботов различны. Определите число представленных на соревнованиях роботов.

5 Рука пространственного робота-манипулятора может совершать манёвры трех типов. Так манёвром первого типа рука робота перемещает объект из точки $A(1;1;1)$в точку $B(-1;2;3)$, из точки B манёвром второго типа перемещает объект в точку $C(-2;4;4)$, а манёвром третьего типа из точки C в точку $D(-1;2;0)$. Найдите модуль перемещения объекта, произведенного рукой робота, последовательно совершившего два манёвра первого типа, манёвр третьего типа и манёвр, противоположный манёвру второго типа.

6 При изучении характера движения тел на экспериментальной установке студент получил зависимости координаты от времени для двух частиц, движущихся вдоль оси Ox в заданной системе отсчета, и записал их в таблицу:

	Закон изменения координаты (величины приведены в единицах СИ)
Первая частица	$x_1 = \log_2(-3t + 6)$
Вторая частица	$x_2 = 3^{6-5t}$

В какой момент времени можно прогнозировать встречу частиц в данной системе отсчета?

7 Фирма выпускает два вида продукции объёмами a и b. Эти объемы выпуска могут принимать любые натуральные значения. Какую наибольшую прибыль может получить фирма, если зависимость прибыли от объемов выпуска продукции задается зависимостью $7-a^2-b^2+4a+6b$?

8 Метеорологическая ракета, запущенная вертикально, достигла максимальной высоты 10 км. Во время работы двигателей ускорение ракеты 40 м/с^2. Сколько времени ракета находилась в состоянии невесомости на этапе подъёма? Принять ускорение свободного падения равным 10 м/с^2. Ответ выразите в секундах в виде целого числа.

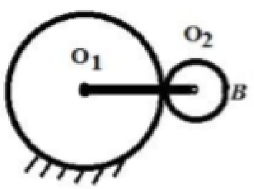
9 Играя в интерактивный квест, команда должна была открыть сейф с цифровым кодовым замком. Найдя подсказки, команда выяснила, что кодом является наибольшее трёхзначное нечётное шестнадцатеричное число, двоичная запись которого содержит ровно 6 единиц. Команда справилась с заданием. Какой код она подобрала? В ответе запишите шестнадцатеричное число (основание системы счисления указывать не нужно).

10 В кибернетике используется понятие информационной энтропии, которая определяется формулой $H = -\sum_i p_i \log_2 p_i$,

где H – информационная энтропия, p_i – вероятность каждого из возможных исходов.

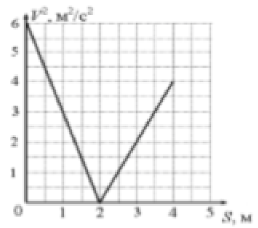
В библиотеке имеется 800 книг, из них 400 по математике, 200 по физике, 100 по информатике и 100 по химии. Какова информационная энтропия сообщения о том, что случайно выбрана 1 книга?

11 У простой планетарной передачи одно колесо радиусом R = 0,25 м закреплено, другое колесо радиусом r = 0,1 м катится без проскальзывания по внешней поверхности первого. Центры колес соединены стержнем (водилом) O_1O_2. Водило вращается с постоянной угловой скоростью ω = 3рад/с. Чему равен модуль скорости точки B подвижного колеса относительно центра неподвижного колеса?



Демонстрационный вариант теоретической части экзамена (часть 2)

12 Шайбе массой 100 г сообщили начальную скорость, направленную вверх вдоль наклонной плоскости. По зависимости квадрата скорости от пути (размер клеточек соответствует единицам СИ) найдите равнодействующую силу, действующую на шайбу при ее движении вниз.



13 Группа из 200 школьников должна была принять участие в олимпиадах по математике и физике. В результате 120 школьников участвовали в олимпиаде по математике, 130 школьников участвовали в олимпиаде по физике, 40 школьников не смогли принять участие ни в одной олимпиаде. Сколько школьников участвовало в олимпиадах и по математике, и по физике?

14 В электрическом чайнике мощностью 1 кВт кипит вода. С какой скоростью из его носика вырывается струя пара, если площадь отверстия носика S = 5 см^2, удельная теплота испарения воды r = 2,26·10^6 Дж/кг, нормальное атмосферное давление p_0 = 10^5 Па, универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль·К)?

15 Прибор регистрирует количество людей, прошедших через рамку металлоискателя путем добавления этого количества к величине, хранящейся в памяти сумматора. Каждый час (в момент времени nm часов 00 минут 01 секунда) число из сумматора выводится на печать. За 1 января 2018 года распечатка содержит следующий набор данных:

20512	20612	20662	20692	20699	20753	20756	20759
20766	20777	20777	20781	20789	20790	20811	20812
20819	20821	20832	20835	20842	20849	20853	20891

Сколько человек зарегистрировал прибор за период с 7 утра до 7 вечера 1 января 2018 года?

План демонстрационного варианта теоретической части экзаменационной работы

Медико-инженерное направление

№ задания	Проверяемые умения
	Часть 1
1	Использование явно заданной в тексте информации для анализа
2	Поиск явно заданной в тексте информации
3	Использование неявно заданной в тексте информации для расчетов
	Часть 2
4	Использование знаково-символьных моделей при решении задач
5	Использование знаково-символьных моделей при решении задач
6	Анализ графической информации
7	Использование знаково-символьных моделей при решении задач
8	Проведение оценочных расчетов
9	Проведение оценочных расчетов
10	Проведение оценочных расчетов
11	Проведение оценочных расчетов
12	Использование явно заданной информации для проведения расчетов
13	Использование знаково-символьных моделей при решении задач
14	Использование заданной информации для проведения расчетов
15	Преобразование модели из одной системы представления в другую

Демонстрационный вариант теоретической части экзамена (часть 2)

Часть 2

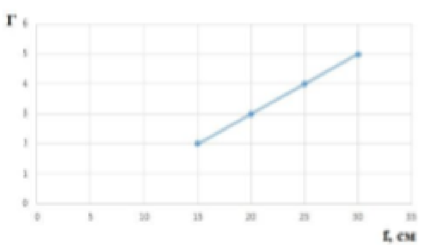
4 Студент написал программу, в которой исполнитель **Прыгун** может совершать прыжки двух типов. Так, стартовав из точки $A(1; -3; 1)$ прыжком первого типа, **Прыгун** попадает в точку $B(-1; -1; 0)$, а из точки B прыжком второго типа попадает в точку $C(-5; 1; -1)$. Найдите модуль перемещения **Прыгуна**, последовательно совершившего три прыжка, противоположные прыжку первого типа, и два прыжка второго типа.

5 При изучении характера движения тел на экспериментальной установке студент получил зависимости координаты от времени для двух частиц, движущихся вдоль оси Ox в заданной системе отсчета, и записал их в таблицу:

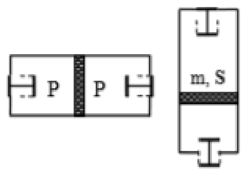
	Закон изменения координаты (величины приведены в единицах СИ)
Первая частица	$x_1 = 4 + \log_{0,5}(t + 4)$
Вторая частица	$x_2 = (t - 3)^3$

В какой момент времени можно прогнозировать встречу частиц в данной системе отсчета?

6 Экспериментально определенная зависимость между увеличением тонкой собирающей линзы и расстоянием от линзы до изображения показана на рисунке. Определите фокусное расстояние линзы.



7 Тяжелый поршень с площадью поперечного сечения $S = 100$ см² в исходном горизонтальном положении цилиндра находится посередине. Слева и справа воздух при атмосферном давлении $P = 10^5$ Па. Цилиндр поворачивают на 90°, при этом верхний клапан остается закрытым, а нижний открывается только тогда, когда цилиндр занимает строго вертикальное положение. При какой массе поршня он опустится на нижний торец цилиндра? Трения нет. Температура неизменна. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².



8 Препарат Трисоль – многокомпонентный раствор, который вводят внутривенно при холере, острой дизентерии и пищевой токсикоинфекции. Раствор содержит 5 г хлорида натрия, 1 г хлорида калия и 4 г гидрокарбоната натрия, доведенные до объема 1 л водой для инъекций. Рассчитайте суммарную молярную концентрацию ионов в этом растворе (моль/л). Диссоциацией и гидролизом иона гидрокарбоната можно пренебречь. Ответ приведите с точностью до тысячных.

9 По информации производителей порция гамбургера «Бургер кинг» содержит 5,6 г жиров, 28,5 г углеводов и 8,4 г белка. Калорийность белков и углеводов составляет 4,11 ккал/г, а калорийность жиров – 9,29 ккал/г. Рассчитайте, сколько времени (в минутах) нужно плавать человеку массой 60 кг для расхода полученной энергии, если при медленном плавании свободным стилем за 1 час тратится 300 ккал. Запишите число с точностью до целых.

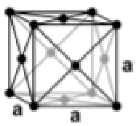
10 Тритиевая вода применяется как меченое соединение для исследования водного обмена. Период полувыведения воды из организма в среднем составляет 10 дней. Рассчитайте, за какое время произойдет почти полное выведение тритиевой воды (останется менее 1% от полученной дозы) из организма. Ответ округлите до целых.

11 В медицине растворы пероксида водорода применяют как антисептическое средство для обработки ран. Аптечное название – перекись водорода, 3%. Какой объем воды необходимо добавить к 20 мл концентрированного раствора пероксида водорода с массовой долей 30%

Демонстрационный вариант теоретической части экзамена (часть 2)

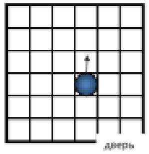
(«пергидроль») для приготовления аптечного раствора? Плотность растворов принять равной 1 г/мл. Запишите число с точностью до десятых.

12 Для кристаллической структуры свинца и алюминия характерна кубическая гранецентрированная решетка. Зная, что относительная атомная масса свинца и алюминия составляет 207,2 а.е.м. и 27,0 а.е.м., соответственно, а плотность свинца и алюминия составляет 11,35 г/см^3 и 2,70 г/см^3, соответственно, рассчитайте отношение расстояний между атомами в данных кристаллах. Ответ округлите до сотых.



13 Проводятся испытания работы робота-пылесоса в помещении. Помещение разбито на клетки такого размера, что робот-пылесос (с помощью щеток) полностью очищает ту клетку, по которой он проходит или стоит (при его включении или при ударе о препятствие). Дверь в помещение открыта.
В начале работы в памяти робота создается переменная k, равная нулю. Если в процессе уборки робот натыкается на препятствие, то при каждом ударе обо что-либо переменная k увеличивается на единицу.
Роботу-пылесосу задается программа для уборки помещения, реализующая следующий алгоритм:

«Иди вперед; в случае соударения повернуть по часовой стрелке на угол 90°*k».
На рисунке указан план помещения, выход из помещения, исходное расположение и направление робота.



Сколько клеток помещения окажутся неубранными?

14 Для лечения пациенту была назначена лучевая терапия кости. Поглощенная доза рентгеновского излучения равна 7 Р. Определите мощность экспозиционной дозы излучения за 20 с. Ответ запишите в СИ. Р=2,58·10^{-4} Кл/кг.

Дано: $D_п$=70·10^{-3} Р

Найти: P_0

15 У вычислителя две команды, которым присвоены номера:
1) прибавить 1;
2) возвести в квадрат.
Первая из этих команд увеличивает число на 1, вторая возводит в квадрат. Программа для вычислителя - это последовательность номеров команд. Например, 211 — это программа «возвести в квадрат, прибавить 1, прибавить 1». Эта программа преобразует число 5 в число 27. Запишите программу для вычислителя, которая преобразует число 3 в число 101.

Задание №4. Логическая задача

Модельная задача

Пусть на плоскости даны n ($n \geq 3$) различных точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько всего можно провести прямых, каждая из которых проходит через две из данных точек?

Решение. Каждой такой прямой соответствует неупорядоченная пара точек (прямая AB совпадает с прямой BA), через которую она проходит. Через любую из n точек можно провести $n-1$ прямую, соединяющую эту точку с остальными $n-1$ точками, получим $(n-1)n$. При таком подсчете каждая прямая повторяется два раза.

Число прямых равно $\frac{(n-1)n}{2}$.

Задание №4. Комбинаторная задача

Модельная задача

Пусть на плоскости даны n $(n \geq 3)$ различных точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько всего можно провести прямых, каждая из которых проходит через две из данных точек?

Решение. Необходимо определить **число сочетаний** из n элементов (точек) по два (через любую пару точек без учета порядка проходит одна прямая). Воспользуемся формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}, \qquad C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{(n-1)n}{2}$$

Число прямых равно $\frac{(n-1)n}{2}$.

Решение задания №4 демонстрационного варианта

Задание 4. Некоторое количество беговых роботов соревновалось в беге по кольцевой трассе. Роботов выпускали соревноваться попарно. Каждая пара начинала бег с общего старта одновременно и в одном направлении. Забег считался завершенным в тот момент, когда роботы вновь оказывались рядом. В протоколе фиксировалось время, в течение которого проходил каждый из забегов. Всего в протоколе было сделано 36 записей. Известно, что в ходе забегов каждый робот соревновался с каждым ровно один раз, скорости всех роботов различны. Определите число представленных на соревнованиях роботов.

Решение. Пусть на соревнования было представлено n роботов. Так как в протоколе было сделано 36 записей, то всего было 36 различных пар роботов. С другой стороны, число пар которое можно составить из роботов равно $\frac{(n-1)n}{2}$. Следовательно, $\frac{(n-1)n}{2} = 36$, или $n^2 - n - 72 = 0,\ n = 9$. Ответ: 9.

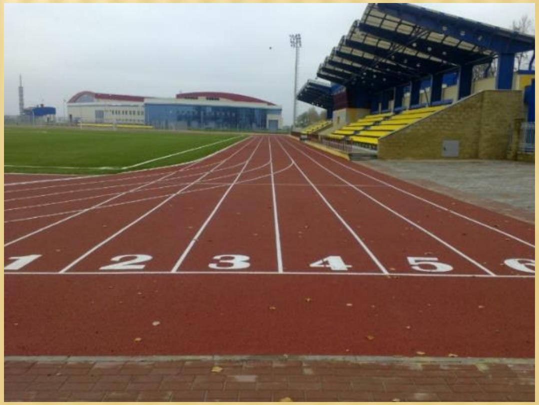
Задание №4. Логическая задача

Задание 4.1. На соревнованиях беговых роботов было представлено некоторое количество механизмов. Роботов выпускали на одну и ту же дистанцию попарно. В протоколе фиксировались разности времен финиша победителя и побежденного в каждом из забегов. Все они оказались разными: 1 сек., 2 сек., 3 сек., 4 сек., 5 сек., 6 сек. Известно, что в ходе забегов каждый робот соревновался с каждым ровно один раз. Определите число представленных на соревнованиях механизмов.

Решение. Пусть на соревнования было представлено n роботов. Так как для каждой пары роботов показания измерений оказались разными, то всего было 6 различных пар. С другой стороны, число пар которое можно составить из роботов равно $\frac{(n-1)n}{2}$.

Следовательно, $\frac{(n-1)n}{2} = 6$,

или $n^2 - n - 12 = 0,\ n = 4.$ **Ответ: 4.**



Задание №4. Логическая задача

Задание 4.2. Некоторое количество беговых роботов соревновалось в беге по кольцевой трассе. Роботов выпускали соревноваться попарно. Каждая пара начинала бег с общей линии старта одновременно в противоположных направлениях. Забег считался завершенным в тот момент, когда роботы впервые встречались. В протоколе фиксировалось время, в течение которого проходил каждый из забегов. Всего в протоколе было сделано 15 записей. Известно, что в ходе забегов каждый робот соревновался с каждым ровно один раз. Определите число представленных на соревнованиях роботов.

Решение. Пусть на соревнования было представлено n роботов. Так как в протоколе было сделано 15 записей, то всего было 15 различных пар роботов. Число пар которое можно составить из n роботов равно $\frac{(n-1)n}{2}$. Следовательно,

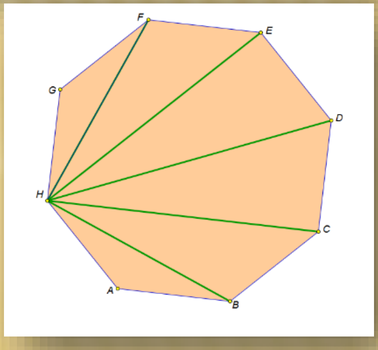
$\frac{(n-1)n}{2} = 15$, или $n^2 - n - 30 = 0,\ n = 6.$

Ответ: 6.

Задание №4. Логическая задача

- В шахматном турнире в один круг играют n игроков. Сколько всего они провели встреч? Ответ: $n(n - 1)/2$
- Можно ли 15 телефонов соединить между собой так, чтобы каждый из них был связан ровно с 11 другими?

- Встретились n друзей и обменялись рукопожатиями. Сколько всего было рукопожатий? Ответ: $n(n - 1)/2$



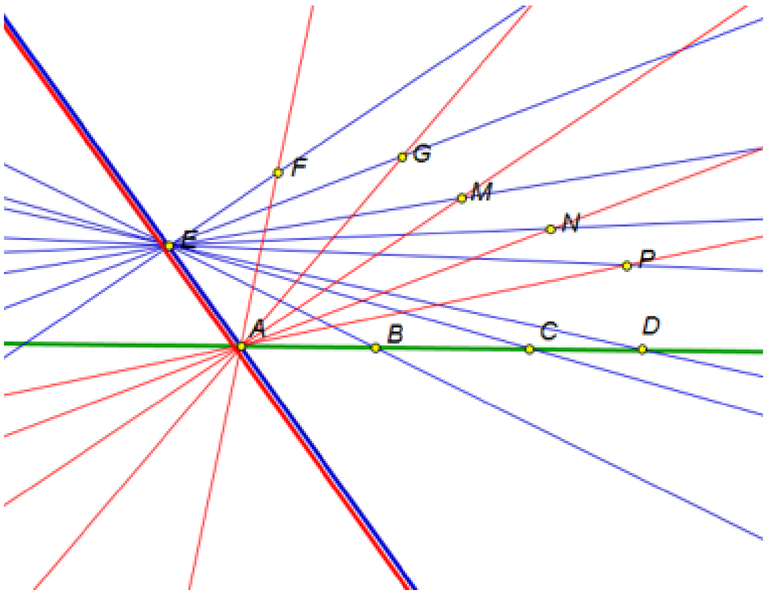
- Сколько всего диагоналей у выпуклого многоугольника, имеющего n сторон?

Ответ: $n(n - 3)/2$

Задание №4. Логическая задача

Задача. На плоскости даны 10 точек, из которых ровно четыре лежат на одной прямой, а из остальных никакие три не лежат на одной прямой. Сколько всего можно провести прямых, каждая из которых проходит или через две, или через четыре из данных точек?

Решение. Пусть *A, B, C, D* – точки, которые лежат на одной прямой. Тогда через каждую из шести точек, не совпадающих с *A, B, C, D* можно провести 9 прямых. Через каждую из точек *A, B, C, D* можно провести шесть различных прямых, не считая ту, на которой лежат эти четыре точки. С учетом, что каждую из перечисленных прямых посчитали дважды, добавив прямую *AB*, получаем $(6\cdot 9+4\cdot 6)/2+1=40$.



Логическая задача

В коробке находится 32 гаек с четырьмя типами резьбы. Известно: если взять наугад 26 из них, то среди взятых непременно будут гайки всех четырех типов резьбы. Какое наименьшее количество гаек нужно взять наугад, чтобы быть уверенным, что среди выбранных есть гайки с тремя типами резьбы?

Решение. Если выбор 26 гаек из 32 обеспечивает наличие гаек всех видов резьбы, то в коробке гаек любого типа не менее 7. Для обеспечения гарантированного выбора гаек трех различных типов нужно выбирать по крайней

мере 19 гаек (два типа гаек составляет

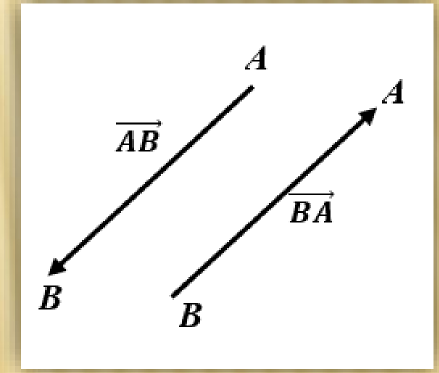
наименьшее количество),

т.е. $32 - 2 \cdot 7 + 1 = 19$. **Ответ**:19.

Задание №5/4. Операции над векторами

Направленным отрезком или **геометрическим вектором** называют отрезок, концы которого упорядочены. Первый из его концов называют началом, второй – концом. При этом говорят, что указано **направление** отрезка.

Два геометрических вектора называют **равными**, если эти векторы коллинеарны, имеют одинаковую длину и являются однонаправленными.

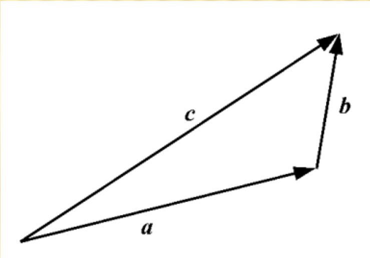


Свободным вектором или просто **вектором** называют множество всех равных геометрических векторов.

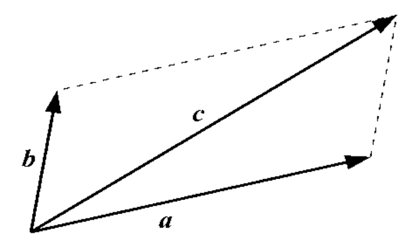
Линейные операции над векторами

Сложение векторов: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

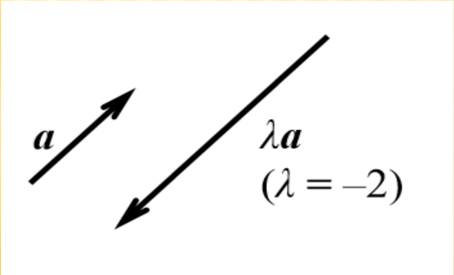
- Правило треугольника



- Правило параллелограмма



Произведение вектора $\vec{a}$ на число λ : $\lambda\vec{a} = \vec{c}$



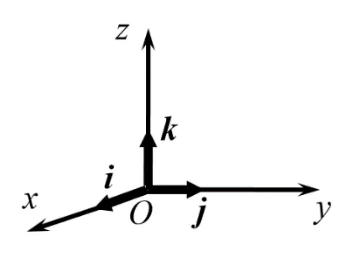
Свойства линейных операций над векторами

Свойства линейных операций над векторами:

- Сложение коммутативно: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Сложение ассоциативно: $\vec{a} + (\vec{b} + \overrightarrow{c)} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
- Умножение вектора на число ассоциативно: $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$.
- Дистрибутивность: $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$.
- Дистрибутивность: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.
- Вектор $-\vec{a}$, противоположный вектору $\vec{a}$, можно представить в виде: $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$.

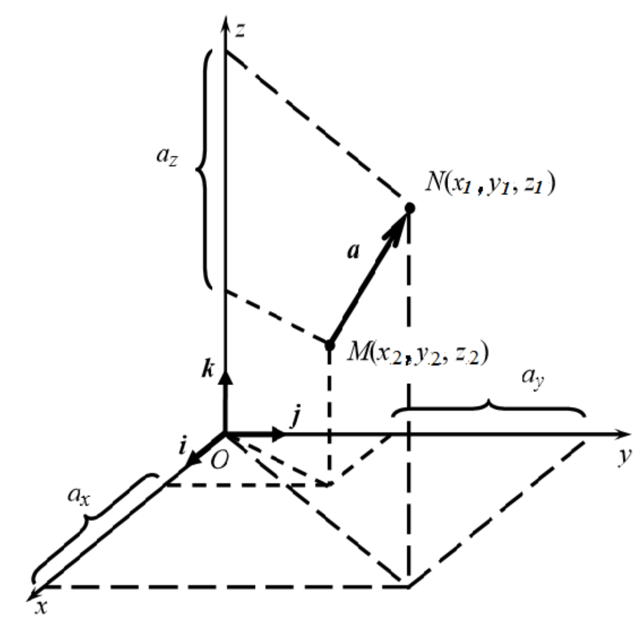
Координатное представление векторов

Любой вектор $\vec{a}$ пространства может быть разложен по ортонормированному базису $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$:



$$\vec{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k},$$

где a_x, a_y, a_z – **координаты** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.



Если вектор $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$, причем $M(x_1, y_1, z_1)$, $N(x_2, y_2, z_2)$, то **координаты** a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a}$ находят по формулам:

$$a_x = x_2 - x_1,\ a_y = y_2 - y_1,\ a_z = z_2 - z_1.$$

Координатное представление векторов

При **сложении** векторов $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ их соответствующие **координаты складываются**:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}.$$

При **умножении** вектора **на число** все его **координаты умножаются на это число**:

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

Длину вектора $\vec{a}$ вычисляют по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}.$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, и обозначают символом $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a},\vec{b})$.

Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен φ, то имеем формулу

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Основные свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (свойство коммутативности);

2) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\geq 0,\ \vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$

3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (свойство дистрибутивности);

4) $\overrightarrow{\lambda a}\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (свойство ассоциативности).

Вычисление скалярного произведения в декартовой системе координат

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$: $\vec{\boldsymbol{a}}=\{\boldsymbol{a_x}, \boldsymbol{a_y}, \boldsymbol{a_z}\}$, $\vec{\boldsymbol{b}}=\{\boldsymbol{b_x}, \boldsymbol{b_y}, \boldsymbol{b_z}\}$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляют по формуле

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}.$$

Длину вектора $\vec{a}$ вычисляют по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}.$$

Косинус угла между ненулевыми векторами вычисляют по формуле

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} \cdot \sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}},$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение типовых заданий

Задача 1. Даны точки A (1; 5; 3), B (1; 2; –3) и C (1; 1; 0). Найдите координаты вектора $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$ и запишите в ответ их сумму.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{AB} = \{1-1, 2-5, -3-3\} = \{0, -3, -6\}$, $\overrightarrow{BC} = \{1-1, 1-2, 0-(-3)\} = \{0, -1, 3\}$.

Имеем $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \{0 + 3\cdot 0,\ (-3) + 3\cdot(-1),\ (-6) + 3\cdot 3\} = \{0, -6, 3\}$

Сумма координат вектора $\vec{m}$ равна -3. Ответ: -3.

Задача 2. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе: $\vec{a}$=$\{-3, -1, 1\}$, $\vec{b}$=$\{-5, 0, 3\}$. Найдите длину вектора $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$.

Решение. Найдем координаты вектора $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$:

$\vec{m} = \{-3-(-5), -1-0, 1-3\} = \{2, -1, -2\}$, $|\vec{m}| = \sqrt{\vec{m}\cdot\vec{m}} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$. Ответ: 3.

Задача 3. Даны точки A (1; 1; –3), B (2; 2; –1) и C (1; 1; 1). Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$:

$\overrightarrow{AB} = \{2-1, 2-1, -1-(-3)\} = \{1, 1, 2\}$, $\overrightarrow{CA} = \{1-1, 1-1, -3-1\} = \{0, 0, -4\}$.

Имеем $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot(-4) = -8$. Ответ: -8.

Задача 4. Даны точки A (1; –1; –3), B (–1; 1; –2) и C (3; 4; –2). Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$:

$\overrightarrow{AB} = \{-1-1, 1-(-1), -2-(-3)\} = \{-2, 2, 1\}$, $\overrightarrow{CB} = \{-1-3, 1-4, -2-(-2)\} = \{-4, -3, 0\}$.

Находим косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$: $\cos\varphi = \frac{(-2)\cdot(-4)+2\cdot(-3)+1\cdot 0}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+0^2}} = \frac{2}{15}$. Ответ: $\frac{2}{15}$.

Задача 5. Найдите длину вектора $\vec{a} = 3\vec{c} - 2\vec{b}$ при условии, что $|\vec{c}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, а угол φ между векторами $\vec{c}$ и $\vec{b}$ равен 60◦.

Решение. Поскольку $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$, то, вычислим скалярный квадрат вектора $\vec{a}$, пользуясь формулой (2.3.5) и основными свойствами скалярного произведения. Имеем $\vec{a}^2 = (3\vec{c} - 2\vec{b})(3\vec{c} - 2\vec{b}) = 9\vec{c}^2 - 12\vec{c}\cdot\vec{b} + {}$ $+4\vec{b}^2 = 9|\vec{c}|^2 - 12|\vec{c}||\vec{b}|\cos\varphi + +4|\vec{b}|^2 = 9\cdot 25 - 12\cdot 5\cdot 4\cdot 0{,}5 + 4\cdot 16 = 225 - 120 + 64 = 169$.

Следовательно, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = 13$. Ответ: 13.

Решение задания №4 демонстрационного варианта медико-инженерного направления

Задание 5. Студент написал программу, в которой исполнитель **Прыгун** может совершать прыжки двух типов. Так, стартовав из точки А (1; − 3; 1) прыжком первого типа, **Прыгун** попадает в точку В (−1; −1; 0), а из точки В прыжком второго типа попадает в точку С (−5; 1; −1). Найдите модуль перемещения **Прыгуна**, последовательно совершившего три прыжка, противоположные прыжку первого типа, и два прыжка второго типа.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:
$\overrightarrow{AB} = \{-1-1, -1-(-3), 0-1\} = \{-2, 2, -1\}$,
$\overrightarrow{BC} = \{-5-(-1), 1-(-1), -1-0\} = \{-4, 2, -1\}$.

Рассчитаем вектор перемещения **Прыгуна**
$\vec{m} = -3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \{-3\cdot(-2)+2\cdot(-4), -3\cdot 2+2\cdot 2, -3\cdot(-1)+2\cdot(-1)\}$
$= \{-2, -2, 1\}$

Найдем длину перемещения $|\vec{m}| = \sqrt{\vec{m}\cdot\vec{m}} = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2} = 3.$

Ответ: 3.

Решение задания №5 демонстрационного варианта

НАПРАВЛЕНИЯ: «ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ», «ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ», «КОНСТРУИРОВАНИЕ», «ПРОГРАММИРОВАНИЕ»

Задание 5. Рука пространственного робота-манипулятора может совершать манёвры трех типов. Так манёвром первого типа рука робота перемещает объект из точки $A(1; 1; 1)$в точку $B(-1; 2; 3)$, из точки B манёвром второго типа перемещает объект в точку $C(-2; 4; 4)$, а манёвром третьего типа из точки C в точку $D(-1; 2; 0)$. Найдите модуль перемещения объекта, произведенного рукой робота, последовательно совершившего два манёвра первого типа, манёвр третьего типа и манёвр, противоположный манёвру второго типа.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$:

$\overrightarrow{AB} = \{-1-1, 2-1, 3-1\} = \{-2, 1, 2\}$,

$\overrightarrow{BC} = \{-2-(-1), 4-2, 4-3\} = \{-1, 2, 1\}$,

$\overrightarrow{CD} = \{-1-(-2), 2-4, 0-4\} = \{1, -2, -4\}$.

Рассчитаем вектор перемещения объекта

$\vec{m} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} =$

$= \{2 \cdot (-2) + 1 - (-1), 2 \cdot 1 - 2 - 2, 2 \cdot 2 - 4 - 1)\} = \{-2, -2, -1\}$.

Найдем длину перемещения $|\vec{m}| = \sqrt{\vec{m} \cdot \vec{m}} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$.

Ответ: 3.

Решение типового задания

Задача. Мобильный манипулятор совершает следующий маневр: подвижное основание, двигаясь поступательно по горизонтальной поверхности, перемещается так, что точка крепления основания манипулятора из начального положения (2, 2, 0) переходит в точку с координатами (4, 0, 0), при этом схват манипулятора из начального положения (1, 0, 1) относительно подвижного основания переместился в точку (3, 2, 1) относительно подвижного основания. Чему равен модуль перемещения схвата относительно неподвижной системы координат?

Закон сложения перемещений

Закон сложения перемещений:

$$\vec{s} = \vec{s_0} + \vec{s'}$$

где:

- $\vec{s}$ – перемещение тела относительно неподвижной системы координат,
- $\vec{s_0}$ – перемещение подвижной системы координат относительно неподвижной,
- $\vec{s'}$ – перемещение тела относительно подвижной системы координат.

Решение.

$\overrightarrow{S_0} = \{2, -2, 0\}$,

$\overrightarrow{S'} = \{2, 2, 0\}$,

$\vec{S} = \{4, 0, 0\}$

Ответ: **4.**

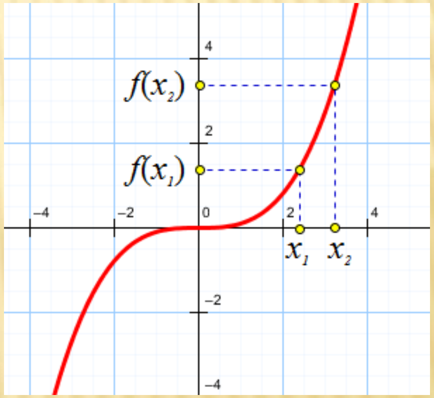
Задание №6/5 . Использование свойств функций при решении задач

При решении уравнений можно использовать следующие свойства функций:

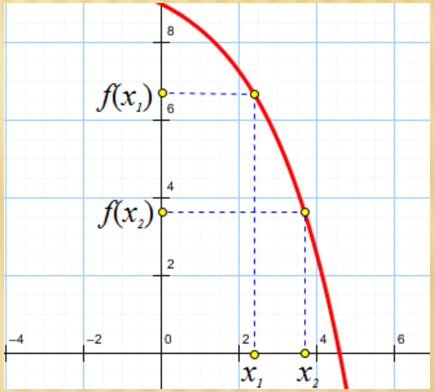
- монотонность;
- ограниченность;
- непрерывность;
- периодичность;
- четность.

Использование свойства монотонности функций при решении уравнений

- Функцию $f(x)$ называют **возрастающей** на промежутке D, если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка D таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.



- Функцию $f(x)$ называют **убывающей** на промежутке D, если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка D таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

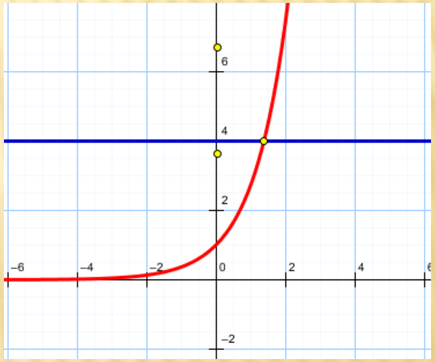


- Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, то ее называют **строго монотонной** на этом промежутке.

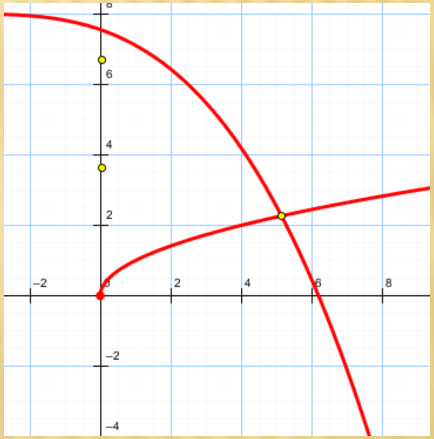
Использование свойства монотонности функций при решении уравнений

- Если на некотором промежутке функция $f(x)$ возрастает (или убывает), то уравнение

  $\boldsymbol{f(x) = a}$ на этом промежутке имеет ***единственный корень, либо не имеет корней*** (a — постоянная величина (число)).



- Если на некотором промежутке функция $f(x)$ возрастает, а функция $g(x)$ убывает (либо наоборот), то уравнение $\boldsymbol{f(x)=g(x)}$ на этом промежутке имеет ***единственный корень, либо не имеет корней***.



Свойства монотонных функций

Свойства монотонных функций

Пусть функции определены на некотором промежутке D.

- Сумма возрастающих функций — возрастающая функция. Сумма убывающих функций — убывающая функция.
- Прибавление или вычитание постоянной величины не влияет на монотонность функции. Если к возрастающей функции прибавить (или вычесть) постоянную величину, получим возрастающую функцию. Если к убывающей функции прибавить (или вычесть) постоянную величину, получим убывающую функцию.
- Если функция f возрастает, то функция cf ($c > 0$) также возрастает, а функция cf ($c < 0$) убывает. Если функция f убывает, то функция cf ($c > 0$) также убывает, а функция cf ($c < 0$) возрастает. Здесь c – некоторая константа.
- Произведение неотрицательных возрастающих функций есть возрастающая функция. Произведение неотрицательных убывающих функций есть убывающая функция.
- Если функция f возрастает и сохраняет знак, то функция $1/f$ убывает.
- Если функция f возрастает (убывает) и n – нечетное число, то f^n также возрастает (убывает).
- Композиция $g(f(x))$ возрастающих функций f и g также возрастает.
- Композиция $g(f(x))$ убывающих функций f и g возрастает.
- Композиция $g(f(x))$ возрастающей функций f и убывающей g убывает.
- Композиция $g(f(x))$ убывающей функций f и возрастающей g убывает.

Возрастающие функций

Перечислим некоторые элементарные функции, возрастающие на всей области определения, либо на отдельных промежутках, входящих в область определения ($k > 0$, $b \geq 0$, n — натуральное число):

$$y = kx \pm b, y = -\frac{k}{x}, y = -\frac{k}{x^{2n+1}},$$

$$y = x^3, y = x^{2n+1},$$

$$y = a^x (a > 1), y = \log_a x (a > 1),$$

$$y = -a^x (0 < a < 1), y = -\log_a x (0 < a < 1),$$

$$y = \sqrt{kx \pm b}, y = -\sqrt{b - kx},$$

$$y = \sqrt[n]{kx \pm b},\ y = -\sqrt[n]{b - kx},$$

$y = \operatorname{tg} x$ (на любом промежутке $(-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n), n \in Z$),

$y = -\operatorname{ctg} x$ (на любом промежутке $(\pi n,\ \pi + \pi n), n \in Z$),

$$y = \operatorname{arctg} x,\quad y = \arcsin x,$$

$$y = -\operatorname{arcctg} x,\quad y = -\arccos x.$$

Убывающие функций

Перечислим некоторые элементарные функции, убывающие на всей области определения, либо на отдельных промежутках, входящих в область определения ($k > 0$, $b \geq 0$, n — натуральное число):

$$y = -kx \pm b, y = \frac{k}{x}, y = \frac{k}{x^{2n+1}},$$

$$y = -x^3, y = -x^{2n+1},$$

$$y = a^x\,(0 < a < 1), y = \log_a x(0 < a < 1),$$

$$y = -a^x\,(a > 1), y = -\log_a x(a > 1),$$

$$y = \sqrt{b - kx}, y = -\sqrt{kx \pm b},$$

$$y = -\sqrt[n]{kx \pm b},\ \ y = \sqrt[n]{b - kx},$$

$y = \operatorname{ctg} x$ (на любом промежутке $(\pi n,\ \ \pi + \pi n\ \ ), n \in Z$),

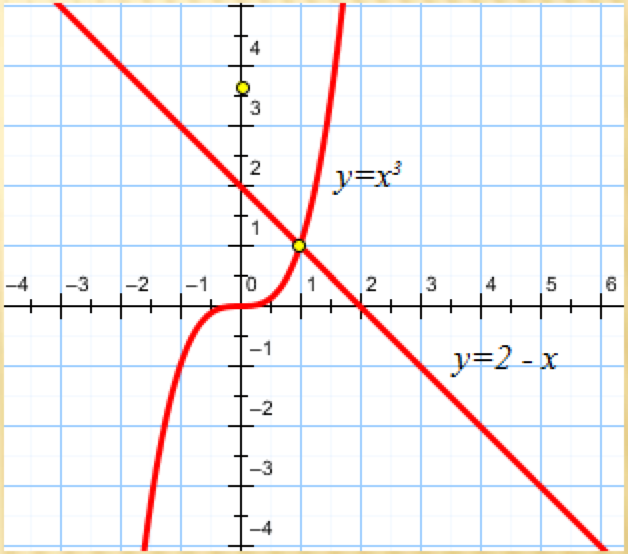
$y = -\operatorname{tg} x$ (на любом промежутке $(-\pi/2 + \pi n\,, \pi/2 + \pi n), n \in Z$),

$$y = \operatorname{arcctg} x,\ \ y = \arccos x,$$

$$y = -\operatorname{arctg} x,\ \ \ y = -\arcsin x.$$

Примеры решений уравнений

Задача 1. Решите уравнение: $\boldsymbol{x^3 = 2 - x}$.



Решение. Рассмотрим функции $f(x) = x^3$ и $g(x)=2 - x$. Функция $f(x)$ *возрастает* на всей области определения, а функция $g(x)$ *убывает* на области определения. Данное уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим, что $x = 1$. Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ действительно корень уравнения. Ответ: 1.

Примеры решений уравнений

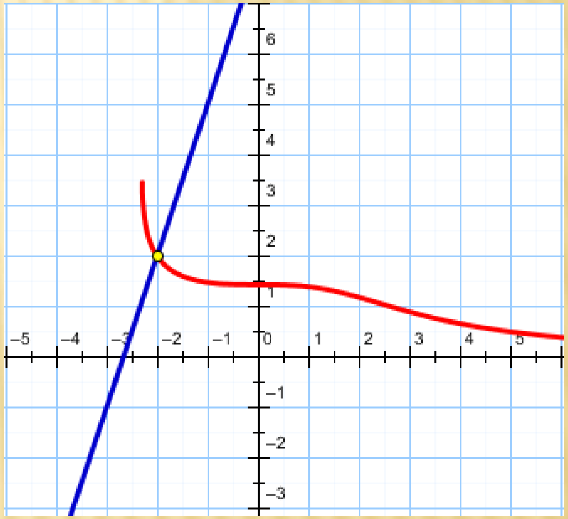
Задача 2. Решите уравнение: $\sqrt{x^3+24} = 3x + 8 + \sqrt{x^3+12}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{x^3+24} - \sqrt{x^3+12} = 3x + 8.$$

Умножим и разделим левую часть уравнения на сопряженное до разности квадратов,

получим $\frac{12}{\sqrt{x^3+24}+\sqrt{x^3+12}} = 3x + 8.$



Левая часть уравнения есть *убывающая* функция, а правая – *возрастающая*, значит, уравнение не может иметь более одного корня. Подбором находим: $x = -2$. Ответ: – 2.

Примеры решений уравнений

Задание 3. При изучении характера движения тел на экспериментальной установке студент получил данные по изменению координат для двух частиц, движущихся вдоль оси Ох, и записал их в таблицу:

	Время начала движения, с	Продолжительность движения, с	Закон изменения координаты (время отсчитывается от начала движения первой частицы)
Первая частица	0	12	$x_1 = \log_2(13 - t)$
Вторая частица	0,5	15	$x_2 = \sqrt{2t - 1}$

Через какое время после начала движения первой частицы можно прогнозировать встречу частиц? В точке с какой координатой они должны встретиться?

Решение. Для нахождения времени встречи частиц необходимо решить уравнение $\log_2(13 - t)$=$\sqrt{2t - 1}$. Областью допустимых значений уравнения является временной промежуток [0,5; 12], что соответствует условию задачи.

Примеры решений уравнений

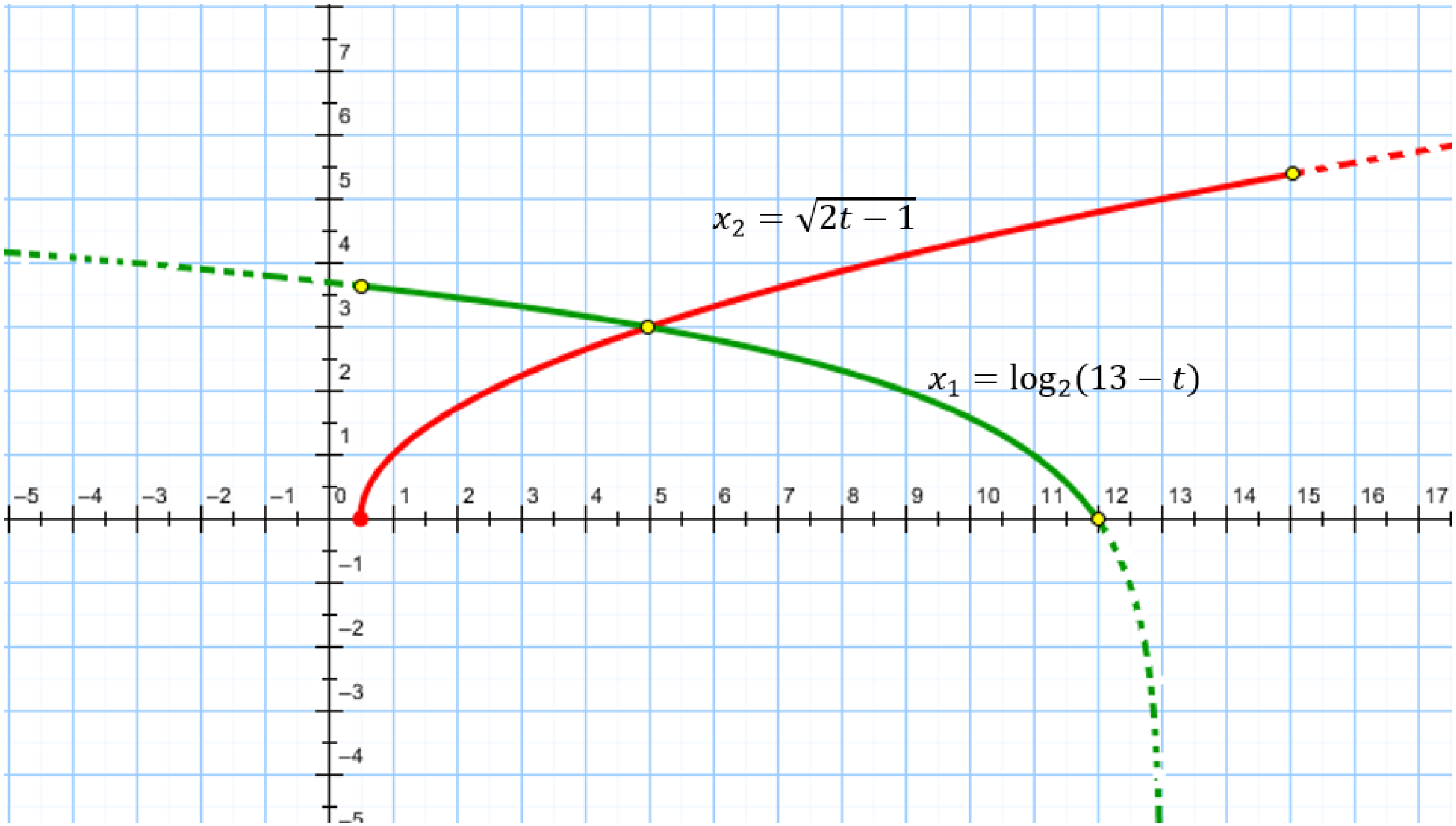
Функция $x_1 = \log_2(13 - t)$ убывает на этом промежутке, поскольку является композицией убывающей линейной и возрастающей логарифмической функций.

Функция $x_2 = \sqrt{2t - 1}$ возрастает на этом промежутке, поскольку является композицией двух возрастающих функций.

Уравнение $\log_2(13 - t)$=$\sqrt{2t - 1}$ на отрезке $[0{,}5; 12]$ имеет не более одного решения.

Методом подбора определяем это решение: $t = 5$, при этом координата точки встречи частиц $x = 3$.

Примеры решений уравнений



Ответ:

Время встречи	Координата точки встречи
5	3

Примеры решений уравнений

Задание 4. При изучении характера движения тел на экспериментальной установке студент получил зависимости координаты от времени для двух частиц, движущихся вдоль оси Ox в заданной системе отсчета, и записал их в таблицу:

	Закон изменения координаты (величины приведены в единицах СИ)
Первая частица	$x_1 = 4 \cdot 0{,}3^{t-5}$
Вторая частица	$x_2 = \sqrt{3t+1}$

В какой момент времени можно прогнозировать встречу частиц в данной системе отсчета?

Решение. Для нахождения времени встречи частиц необходимо решить уравнение $4 \cdot 0{,}3^{t-5} = \sqrt{3t+1}$. Уравнение имеет смысл при любых $t \geq 0$.

Примеры решений уравнений

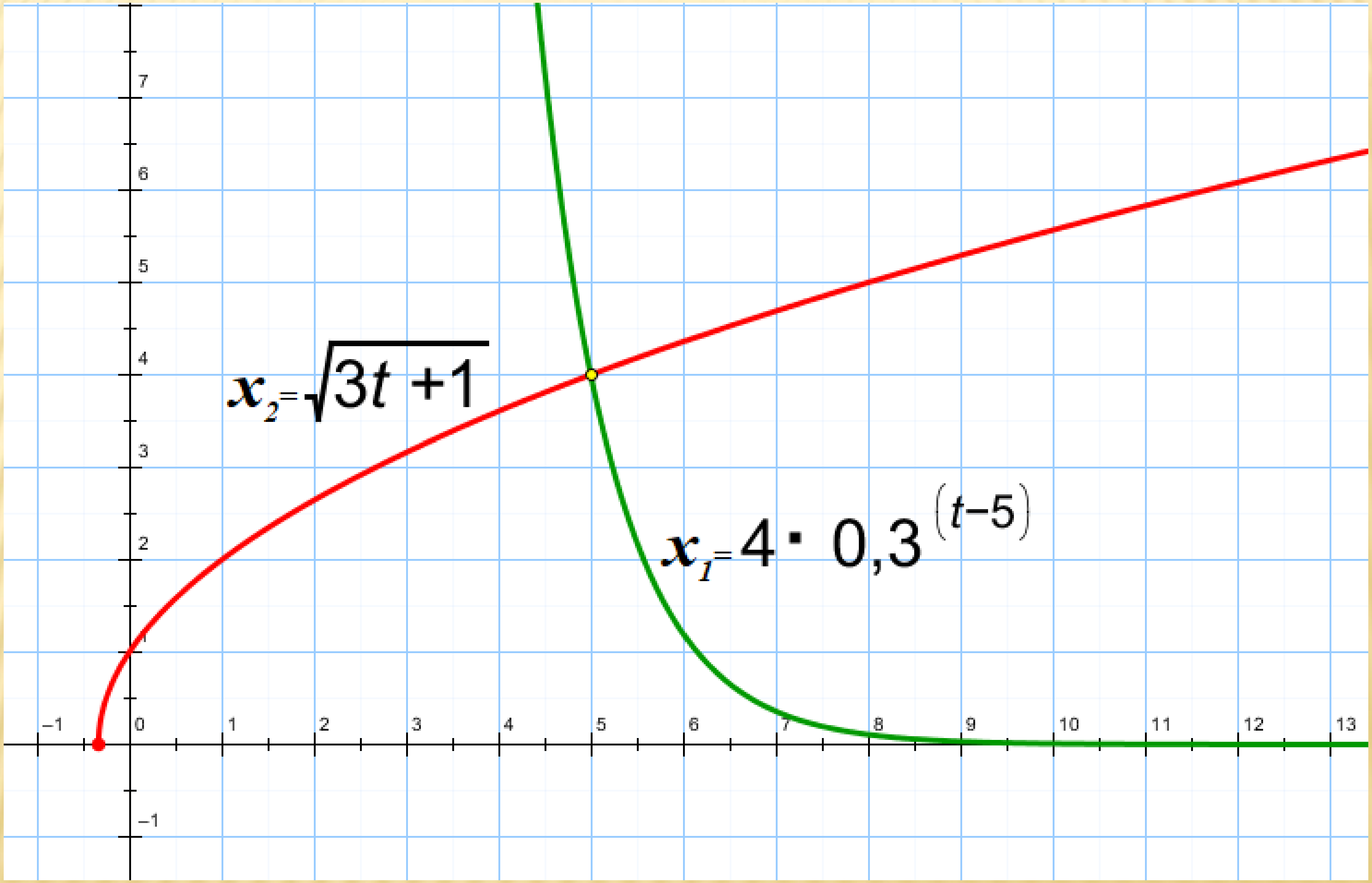
Функция $x_1 = 4 \cdot 0{,}3^{t-5}$ убывает на этом промежутке, поскольку является композицией возрастающей линейной и убывающей показательной функций, умноженной на константу.

Функция $x_2 = \sqrt{3t+1}$ возрастает на этом промежутке, поскольку является композицией двух возрастающих функций.

Уравнение $4 \cdot 0{,}3^{t-5} = \sqrt{3t+1}$ имеет не более одного решения.

Методом подбора определяем это решение: $t = 5$, при этом координата точки встречи частиц $x = 4$. Ответ: 5.

Примеры решений уравнений



Решение задания №6 демонстрационного варианта

Задание 6. При изучении характера движения тел на экспериментальной установке студент получил зависимости координаты от времени для двух частиц, движущихся вдоль оси Ox в заданной системе отсчета, и записал их в таблицу:

	Закон изменения координаты (величины приведены в единицах СИ)
Первая частица	$x_1 = \log_2(2t + 6)$
Вторая частица	$x_2 = 3^{6-5t}$

В какой момент времени можно прогнозировать встречу частиц в данной системе отсчета?

Решение. Для нахождения времени встречи частиц необходимо решить уравнение $\log_2(2t + 6) = 3^{6-5t}$. Уравнение имеет смысл при любых $t \geq 0$.

Решение задания №6 демонстрационного варианта

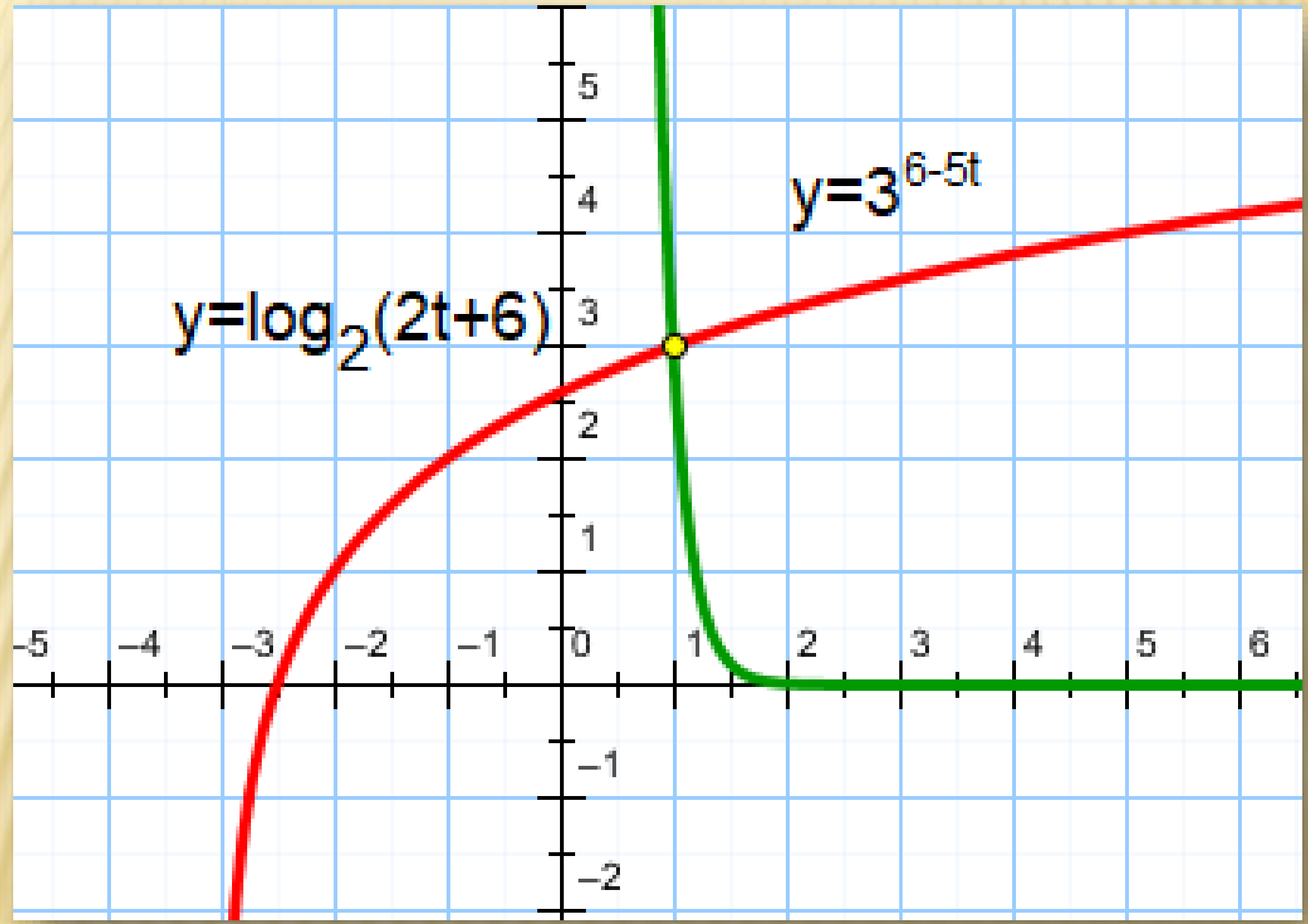
Функция $x_1 = \log_2(2t+6)$ возрастает на этом промежутке, поскольку является композицией возрастающей линейной и возрастающей логарифмической функций.

Функция $x_2 = 3^{6-5t}$ убывает на этом промежутке, поскольку является композицией убывающей линейной и возрастающей показательной функций.

Уравнение $\log_2(2t+6) = 3^{6-5t}$ имеет не более одного решения.

Методом подбора определяем это решение: $t = 1$, при этом координата точки встречи частиц $x = 3$. Ответ: 1.

Решение задания №6 демонстрационного варианта



Решение задания №5 демонстрационного варианта для медико-инженерного напрвления

Задание 5. При изучении характера движения тел на экспериментальной установке студент получил зависимости координаты от времени для двух частиц, движущихся вдоль оси Ox в заданной системе отсчета, и записал их в таблицу:

	Закон изменения координаты (величины приведены в единицах СИ)
Первая частица	$x_1 = 4 + \log_{0,5}(t + 4)$
Вторая частица	$x_2 = (t - 3)^3$

В какой момент времени можно прогнозировать встречу частиц в данной системе отсчета?

Решение. Для нахождения времени встречи частиц необходимо решить уравнение $4 + \log_{0,5}(t + 4) = (t - 3)^3$. Уравнение имеет смысл при любых $t \geq 0$.

Решение задания №5 демонстрационного варианта

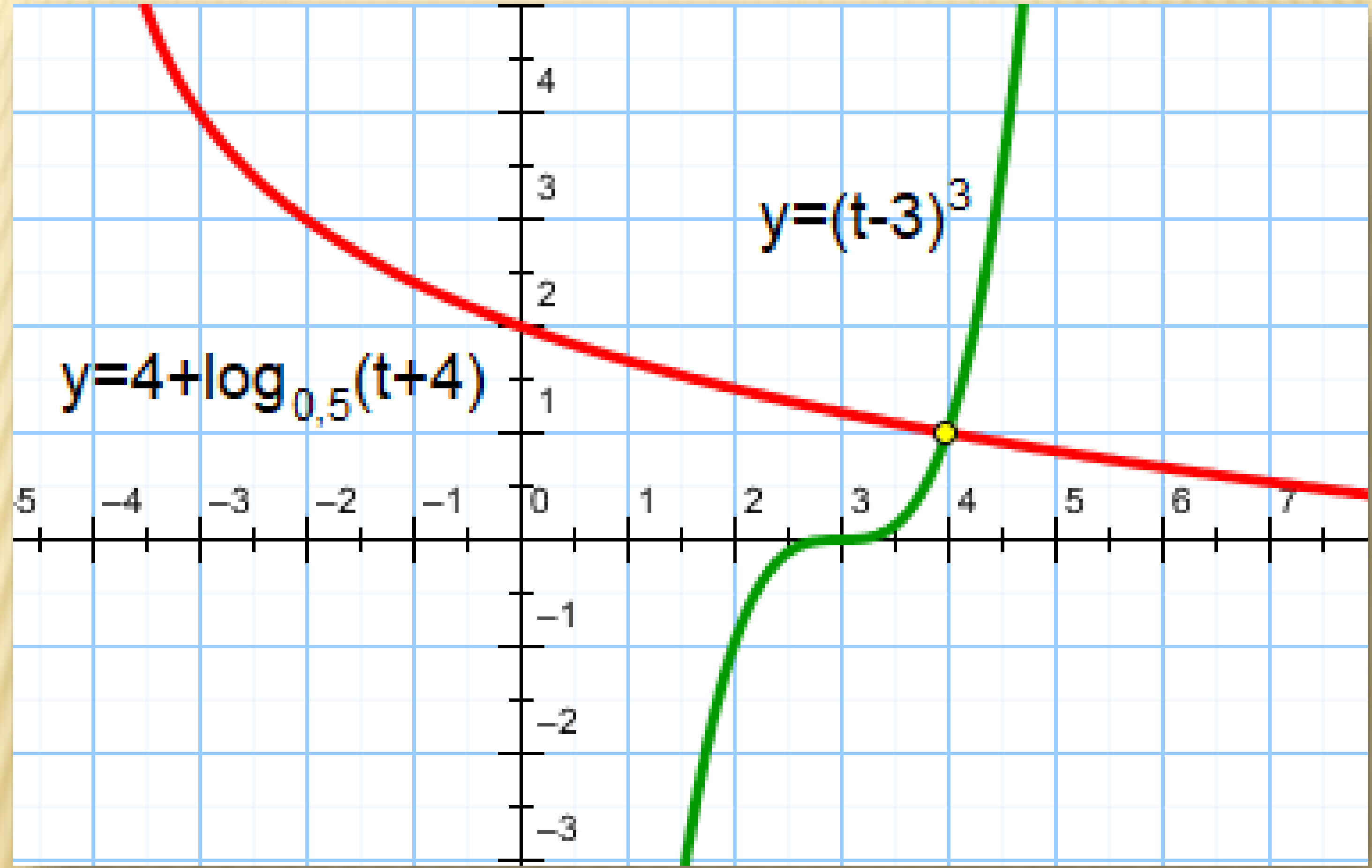
Функция $x_1 = 4 + \log_{0,5}(t + 4)$ убывает на этом промежутке, поскольку отличается на константу от композиции возрастающей линейной и убывающей логарифмической функций.

Функция $x_2 = (\mathrm{t} - 3)^3$ возрастает на этом промежутке, поскольку является композицией двух возрастающих функций, линейной и степенной.

Уравнение $4 + \log_{0,5}(t + 4) = (\mathrm{t} - 3)^3$ имеет не более одного решения.

Методом подбора определяем это решение: $t = 4$, при этом координата точки встречи частиц $x = 1$. Ответ: 4.

Решение задания №5 демонстрационного варианта



Задание №7. Экстремальные задачи

Экстремальные задачи или **задачи на оптимизацию** – задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения величин, зависящих от одного или нескольких параметров.

Методы решения:

- без применения производной, с помощью проведения алгебраических преобразований и использования свойств основных элементарных функций;
- с применением производной.

Выделение полного квадрата

В основе ***метода выделения полного квадрата*** лежат следующие формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Выражения $(a+b)^2$ и $(a-b)^2$ называют ***полными квадратами***.

Пусть дан квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Его требуется преобразовать к виду $a(x+m)^2 + n$, где m и n - некоторые числа. Этот прием и называют выделением полного квадрата. Для этого проведем следующие преобразования

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Проведение экстремальных оценок

<u>Модельная задача.</u> Пусть a, b – произвольные действительные числа. Какое наибольшее значение может принимать выражение $6 - 4a^2 - 2b^2 - 8a + 2b$?

Решение. Приведем данное выражение к виду $6 - (4a^2 + 8a) - (2b^2 - 2b)$, заключив в скобки одночлены, содержащие одинаковые буквы. В каждом выражении в скобках выделим полный квадрат:

$$4a^2 + 8a = 4(a^2 + 2a + 1 - 1) = 4(a+1)^2 - 4,$$

$$2b^2 - 2b = 2\left(b^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot b + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$6 - (4a^2 + 8a) - (2b^2 - 2b) = 6 - 4(a+1)^2 + 4 - 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} =$$

$$= 10{,}5 - 4(a+1)^2 - 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \le 10{,}5,$$

Последняя оценка следует из неравенств $4(a+1)^2 \ge 0$ и $2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$, которые выполняются для любых действительных чисел a и b. Причем равенство достигается при $a = -1$ и $b = 0{,}5$.

Ответ: 10,5.

Примеры решения типовых задач

В логистике затраты на доставку некоторого оборудования складываются из затрат на транспорт и хранение, которые определяются факторами a и b. Эти факторы могут принимать любые неотрицательные значения. Какие наименьшие затраты можно заложить на доставку оборудования по полученному заказу, если зависимость этих затрат задается формулой $2a^2+4b^2-2a+5$? Чему при этом равно значение факторов?

Решение. Для решения задачи необходимо найти наименьшее значение выражения $2a^2+4b^2-2a+5$ при неотрицательных значениях переменных a и b. Для этого воспользуемся методом выделения полного квадрата:

$$2a^2+4b^2-2a+5=2a^2-2a+4b^2+5=2\left(a^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot a+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+4b^2+5=$$

$$=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+4b^2+5=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+4b^2+4{,}5\geq 4{,}5,$$

причем равенство достигается при $a=0{,}5$ и $b=0$. Ответ:

Наименьшие затраты	Значение фактора транспорта	Значение фактора хранения
4,5	0,5	0

Примеры решения типовых задач

В логистике затраты на доставку некоторого оборудования складываются из затрат на транспорт и хранение, которые соответственно определяются факторами a и b. Эти факторы могут принимать любые неотрицательные значения. Какие наименьшие затраты можно заложить на доставку оборудования по полученному заказу, если зависимость этих затрат задается формулой a^2+2b^2-3a+7?

Решение. Для решения задачи необходимо найти наименьшее значение выражения a^2+2b^2-3a+7 при неотрицательных значениях переменных a и b. Для этого воспользуемся методом выделения полного квадрата:

$$a^2+2b^2-3a+7=a^2-2\cdot\frac{3}{2}a+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+2b^2+7=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+2b^2+\frac{19}{4}\geq 4{,}75,$$

причем равенство достигается при $a=1{,}5$ и $b=0$. Ответ: 4,75.

Решение задания №7 демонстрационного варианта

Фирма выпускает два вида продукции объемами a и b. Эти объемы выпуска могут принимать любые натуральные значения. Какую наибольшую прибыль может получить фирма, если зависимость прибыли от объемов выпуска продукции задается формулой

$7 - a^2 - b^2 + 4a + 6b$?

Решение. Для решения задачи необходимо найти наибольшее значение выражения $7 - a^2 - b^2 + 4a + 6b$ при натуральных значениях переменных a и b. Для этого воспользуемся методом выделения полного квадрата:

$$7 - (a^2 - 4a + 4 - 4) - (b^2 - 6b + 9 - 9) = 20 - (a-2)^2 - (b-3)^2 \le 20,$$

причем равенство достигается при $a = 2$ и $b = 3$. Ответ: 20.

Примеры решения экстремальных задач без применения производной

Задача 1. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_7(13 - 12x - x^2) + 10$.

Решение. Используя метод выделения полного квадрата, преобразуем выражение $\log_7(13 - 12x - x^2) + 10 = \log_7(49 - 36 - 2\cdot 6x - x^2) = \log_7(49 - (x+6)^2)$. Поскольку для любых действительных значений x верно неравенство $(x+6)^2 \geq 0$, то $49 - (x+6)^2 \leq 49$. Логарифмическая функция с основание большим единицы (основание равно 7) возрастает в области определения, и, следовательно, $\log_7(49 - (x+6)^2) \leq \log_7 49 = 2$, и $\log_7(49 - (x+6)^2) + 10 \leq 12$ для всех допустимых значений x. Таким образом. Наибольшее значение функции $y = \log_7(13 - 12x - x^2) + 10$ равно 12, причем достигается это значение при $x = -6$. Ответ: 12.

Задача 2. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_9\left(3 - \left|2^{1-x^2+2x} - 2\right|\right)$.

Решение. Функция $t = 1 - x^2 + 2x$ или $t = 2 - (x-1)^2$ принимает значения $t \in (-\infty; 2]$. Функция $z = 2^t$, где $t \in (-\infty; 2]$ возрастает и принимает значения $z \in (0; 4]$. Рассмотрим функцию $y = \log_9(3 - |z - 2|)$, определенную на полуинтервале $(0; 4]$. Если $z \in (0; 2]$, то $y = \log_9(1 + z)$, и функция возрастает и принимает все значения из промежутка $(0; 0{,}5]$. Если $z \in (2; 4]$, то $y = \log_9(5 - z)$, и функция убывает и принимает все значения из промежутка $[0; 0{,}5)$. Объединяя полученные множества значений, получаем $E_f = [0; 0{,}5]$. Ответ: $E_f = [0; 0{,}5]$.

Задача 3. Найдите множество значений функции $f(x) = 25 \cdot 0{,}2^{(2 - \log_7 x)\log_7 x}$.

Решение. Сделаем замену переменного: $t = \log_7 x$. Тогда имеем $y = 25 \cdot 0{,}2^{(2-t)t} = 125 \cdot 0{,}2^{1-(t-1)^2}$. Пусть $z = 1 - (t-1)^2 \Rightarrow z \in (-\infty; 1]$. Так как показательная функция с основанием $0{,}2 < 1$ убывает, и $y = 25 \cdot 0{,}2^z$, $z \in (-\infty; 1]$, то $y \in [25 \cdot 0{,}2; +\infty) = [5; +\infty)$. Ответ: $E(y) = [5; +\infty)$.

Примеры решения экстремальных задач без применения производной

Задача. Число студентов, не сдавших экзамен по математическому анализу, составляет от 2,5% до 3,1% от общего количества студентов в группе. Каково минимально возможное общее количество студентов в группе?

Решение. Пусть 1 студент в группе не сдал экзамен по математическому анализу (чем меньше студентов, не сдавших экзамен, тем меньше студентов в группе). Если n – число студентов в группе, то верно неравенство $2,5 \le \frac{100}{n} \le 3,1$, или $\frac{100}{3,1} \le n \le \frac{100}{2,5}$, $32,25 \le n \le 40$. Минимально возможное число студентов в группе равно 33.

Ответ: 33.

Задание №9. Проведение оценочных расчетов

Задача. По информации производителей порция гамбургера «Бургер кинг» содержит 5,6 г жиров, 28,5 г углеводов и 8,4 г белка. Калорийность белков и углеводов составляет 4,11 ккал/г, а калорийность жиров – 9,29 ккал/г. Рассчитайте, сколько времени (в минутах) нужно плавать человеку массой 60 кг для расхода полученной энергии, если при медленном плавании свободным стилем за 1 час тратится 300 ккал. Запишите число с точностью до целых.

Решение. Рассчитаем количество ккал в порции гамбургера:

$(28{,}5 + 8{,}4)4{,}11 + 5{,}6 \cdot 9{,}29 = 203{,}683.$

Составим пропорцию:

60 мин – 300 ккал,

x мин – 203,683 ккал, $x = \frac{60 \cdot 203{,}683}{300} \approx 41.$

Ответ: 41

Задание №10. Элементы теории вероятностей

Случайным событием называют событие, которое при осуществлении некоторых условий, говорят опыта или эксперимента, может произойти или не произойти.

Событие называют ***достоверным***, если в результате испытания оно обязательно происходит.

Невозможным называют событие, которое в результате испытания произойти не может.

Случайные события называют ***несовместными*** в данном испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Задание №10. Классическая вероятность

Элементарным исходом (или ***элементарным событием***) называют любой простейший (неделимый в рамках данного опыта) исход опыта. Множество всех элементарных исходов называют ***пространством элементарных исходов***.

Множество исходов опыта образует пространство элементарных исходов, если выполнены следующие требования:

- в результате опыта один из исходов обязательно происходит;
- появление одного из исходов опыта исключает появление остальных;
- в рамках данного опыта нельзя разделить элементарный исход на более мелкие составляющие.

Любой набор элементарных исходов, или иными словами, произвольное подмножество пространства элементарных исходов, образует случайное событие.

Задание №10. Классическая вероятность

Пусть пространство элементарных исходов содержит конечное число N элементарных исходов, причем все они ***равновозможны***, т.е. в силу условий проведения опыта можно считать, ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие.

Пусть N_A – число элементарных исходов, благоприятствующих появлению событию A. Исход называют ***благоприятствующим*** появлению события A, если появление этого события влечет за собой появление события A.

Вероятностью события A называют отношение числа N_A благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу N равновозможных элементарных исходов, т.е.

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

Данное определение вероятности называют ***классическим определением вероятности***.

Примеры решения типовых задач

В кибернетике используется понятие информационной энтропии, которая определяется формулой $H = -\sum_i p_i \log_2 p_i$, где H – информационная энтропия, p_i – вероятность каждого из возможных исходов.

В корзине лежат 36 клубков шерсти, из них 9 красных, 18 синих и 9 зеленых. Какова информационная энтропия сообщения о том, что случайно выбран 1 клубок?

Примеры решения типовых задач

Решение. В данном опыте возможны следующие исходы (случайные события), образующие полную группу:

1) событие A_1 – выбран клубок красного цвета;
2) событие A_2 – выбран клубок синего цвета;
3) событие A_3 – выбран клубок зеленого цвета.

Вычислим вероятности p_1, p_2, p_3 событий A_1, A_2, A_3 соответственно. Число всех возможных элементарных исходов данного опыта равно $N = 36$.

Поскольку в корзине лежат $N_1 = 9$ красных шаров, то $p_1 = P(A_1) = \frac{9}{36} = 0{,}25$.

Поскольку в корзине лежат $N_2 = 18$ синих шаров, то $p_2 = P(A_2) = \frac{18}{36} = 0{,}5$.

Поскольку в корзине лежат $N_3 = 9$ зеленых шаров, то $p_3 = P(A_3) = \frac{9}{36} = 0{,}25$.

Вычислим информационную энтропию сообщения о том, что случайно выбран 1 клубок:

$$H = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2 - p_3 \log_2 p_3 =$$

$$= -\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Ответ: 1,5.

Решение задания №10 демонстрационного варианта

Задача. В библиотеке имеется 800 книг, из них 400 по математике, 200 по физике, 100 по информатике и 100 по химии. Какова информационная энтропия сообщения о том, что случайно выбрана 1 книга?

Решение. В данном опыте возможны следующие исходы (случайные события), образующие полную группу:

1) событие A_1 – выбрана книга по математике;
2) событие A_2 – выбрана книга по физике;
3) событие A_3 – выбрана книга по информатике;
4) событие A_4 – выбрана книга по химии.

Число всех возможных элементарных исходов данного опыта равно $N = 800$.

Поскольку в библиотеке имеется $N_1 = 400$ книг по математике, то $p_1 = P(A_1) = \frac{400}{800} = 0{,}5$.

Поскольку в библиотеке имеется $N_2 = 800$ книг по физике, то $p_2 = P(A_2) = \frac{200}{800} = 0{,}25$.

Поскольку в библиотеке имеется $N_3 = 200$ книг по информатике, то $p_3 = P(A_3) = \frac{100}{800} = 0{,}125$.

Поскольку в библиотеке имеется $N_4 = 200$ книг по химии, то $p_4 = P(A_4) = \frac{100}{800} = 0{,}125$.

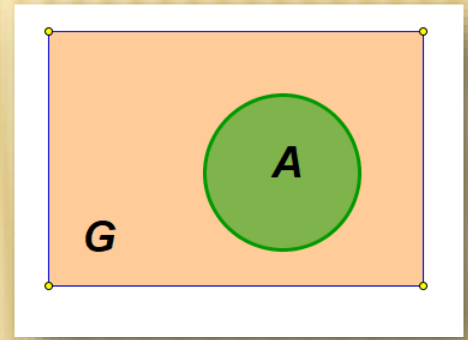
Вычислим информационную энтропию сообщения о том, что случайно выбрана 1 книга:

$$H = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2 - p_3 \log_2 p_3 - p_4 \log_2 p_4 = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 1{,}75.$$

Ответ: 1,75.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть случайное испытание можно представить себе как бросание точки наудачу в некоторую геометрическую область *G* (на прямой, плоскости или пространстве). Элементарные исходы – это отдельные точки *G*, любое событие – это подмножество этой области, пространства элементарных исходов *G*. Можно считать, что все точки *G* «равноправны» и тогда вероятность попадания точки в некоторое подмножество *A* пропорционально его мере (длине, площади, объему) и не зависит от его расположения и формы.



Геометрическая вероятность события *A* определяется отношением: $P(A) = \frac{m(A)}{m(G)}$,

где m(*G*), m(*A*) – геометрические меры (длины, площади или объемы) всего пространства элементарных исходов *G* и события *A*.

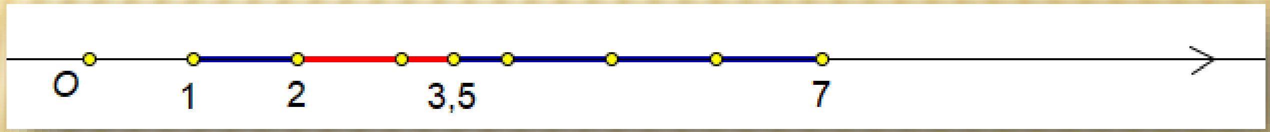
Примеры решения типовых задач

Задача. Случайным образом выбирается число из отрезка [1; 7]. Какова вероятность того, что выбранное значение попадет в отрезок [2; 3,5]? Ответ дайте в процентах.

Решение. $G = \{x \in [1; 7]\}$, $A = \{x \in [2; 3,5]\}$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(G)} = \frac{1,5}{6} = 0,25 \text{ или } 25\%.$$

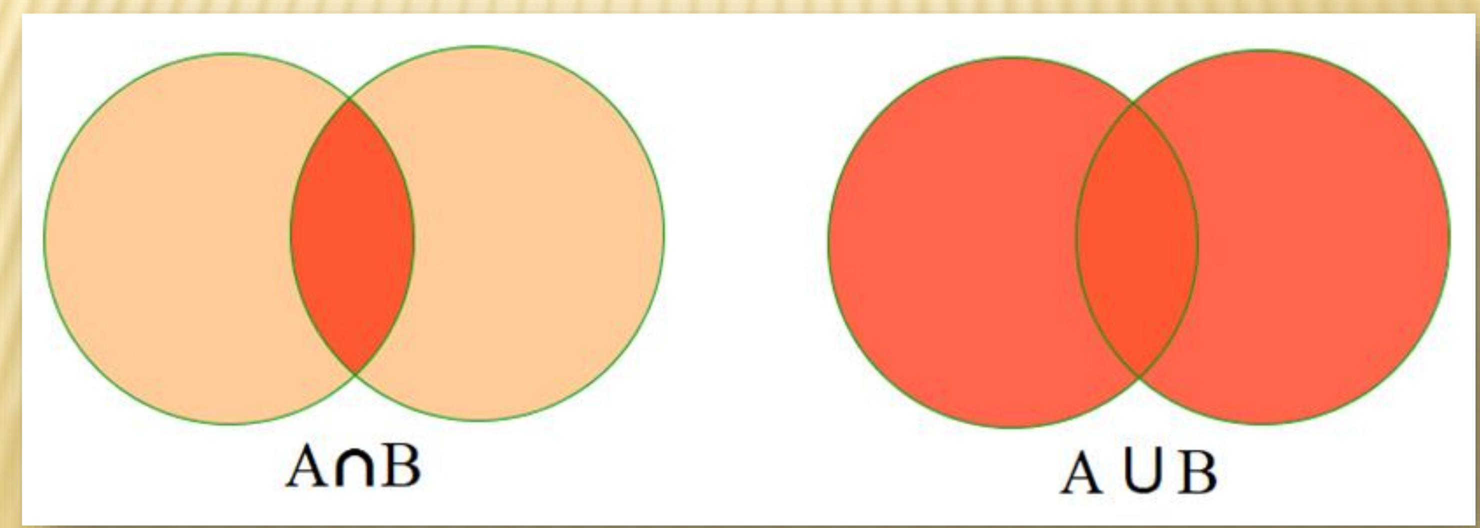
Ответ: 25



Задание №13. Операции над множествами

Пересечением двух множеств A и B называют множество всех элементов, которые входят и во множество A, и во множество B. Обозначают: $A \cap B$.

Объединением двух множеств A и B называют множество всех элементов, которые входят по меньшей мере в одно из множеств A или B. Обозначают: $A \cup B$.



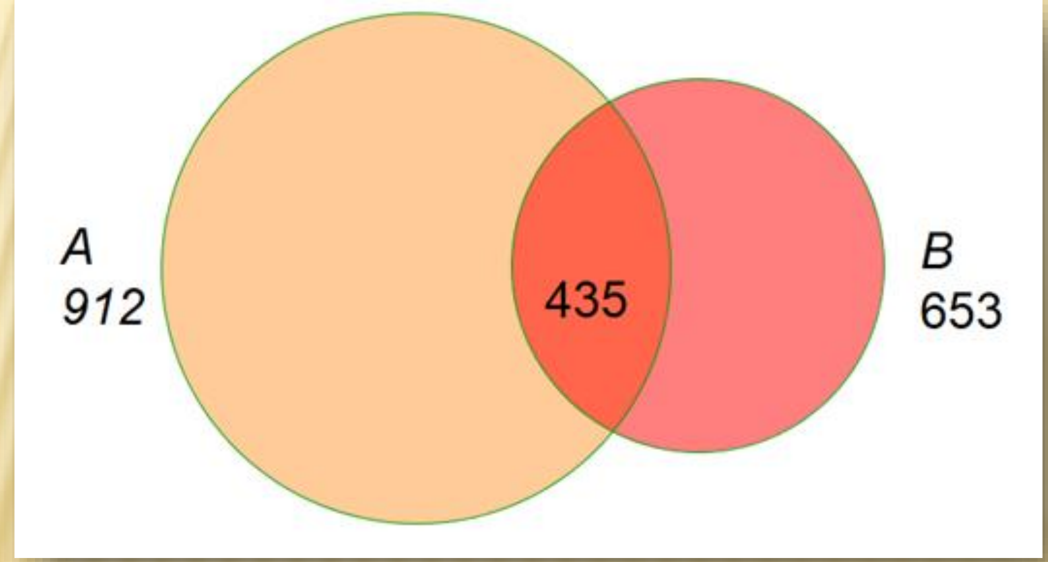
Задание №13. Операции над множествами

Теорема. Для любых множеств A и B, состоящих из конечного числа элементов верно равенство

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

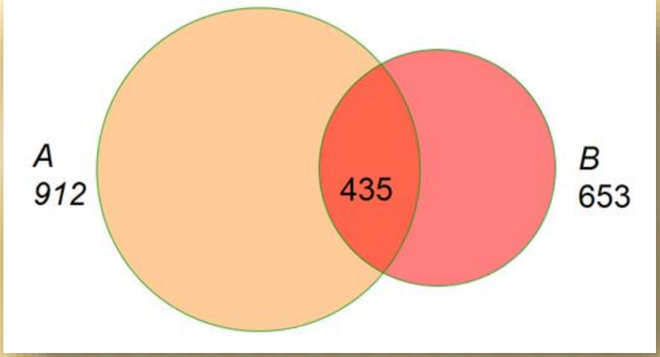
Операции над множествами. Решение задач

Задача. В одном башкирском селе каждый житель говорит или по-башкирски, или по-русски, или на обоих языках, 912 жителей села говорят по-башкирски, 653 по-русски, причем 435 человек говорят на обоих языках. Сколько жителей в этом селе?



Операции над множествами. Решение задач

Решение. Применим круги Эйлера. Через A обозначим множество жителей села, которые говорят по-башкирски, через B - множество жителей, которые говорят по-русски. Будем обозначать число элементов любого конечного множества A через $n(A)$. Тогда по условию $n(A)=912$, $n(B)=653$, $n(A\cap B)=435$. Нам нужно найти число элементов в объединении множеств A и B. Получаем $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=912+653-435=1130$. Ответ: 1130.

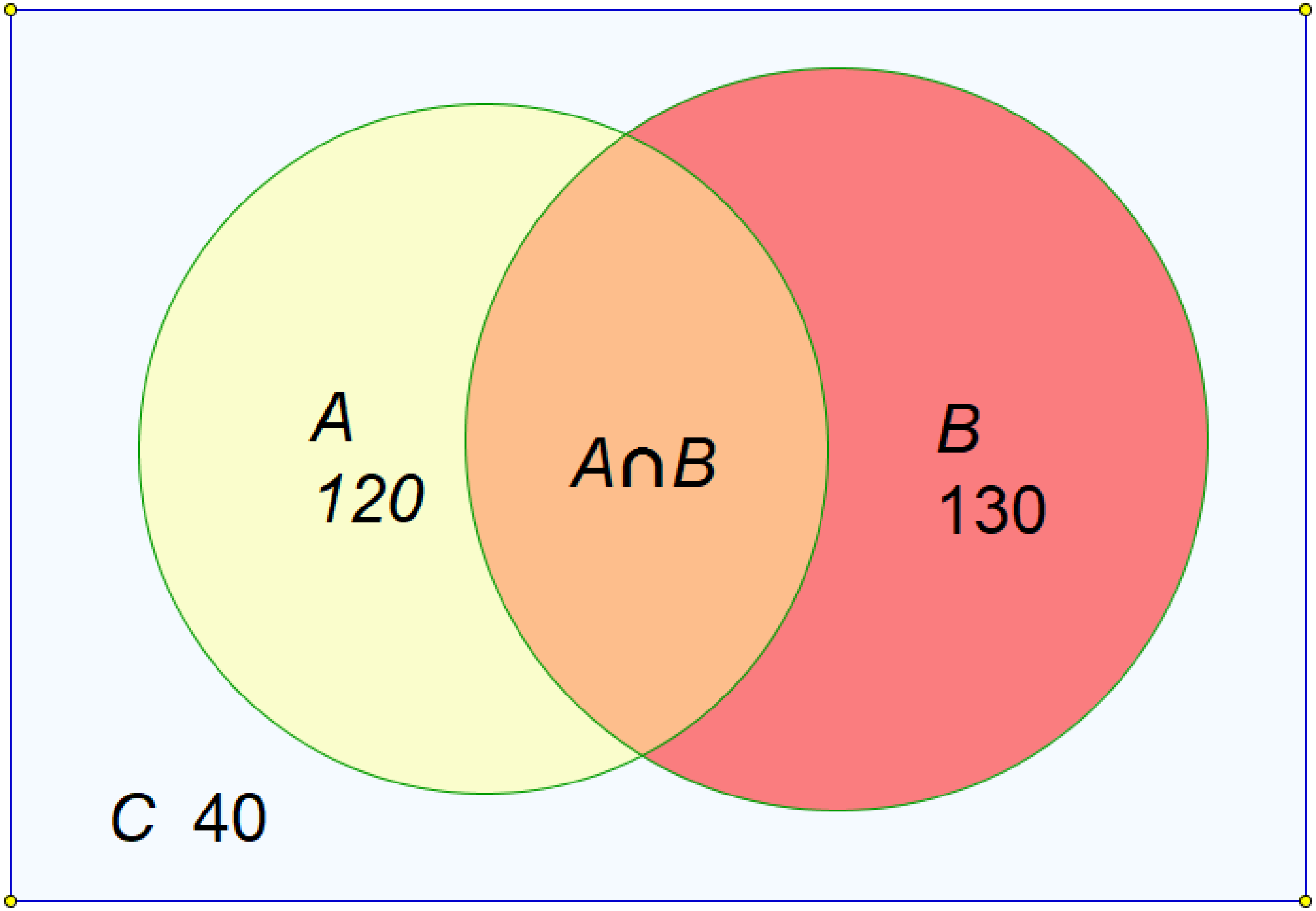


Решение задания №13 демонстрационного варианта

Группа из 200 школьников должна была принять участие в олимпиадах по математике и физике. В результате, 120 школьников участвовали в олимпиаде по математике, 130 школьников участвовали в олимпиаде по физике, 40 школьников не смогли принять участие ни в одной олимпиаде. Сколько школьников участвовало в олимпиадах и по математике, и по физике?

Решение. Через D обозначим множество школьников, через A - множество школьников, которые участвовали в олимпиаде по математике, через B - множество школьников, которые участвовали в олимпиаде по физике, через C - множество школьников, которые не приняли участие ни в одной олимпиаде. Будем обозначать число элементов любого конечного множества A через $n(A)$.

Решение задания №13 демонстрационного варианта



группа из **200** школьников

Решение задания №13 демонстрационного варианта

Тогда по условию $n(A) = 120, \quad n(B) = 130, \quad n(C) = 40, \quad n(A \cup B \cup C) = 200.$

Нужно найти число элементов в пересечении множеств A и B. Имеем

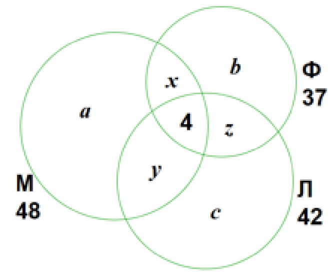
$$n(D) = n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C),$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cup B \cup C) = 120 + 130 + 40 - 200 = 90.$$

Ответ: **90**

Примеры решения типовых задач

Задача. Среди абитуриентов, выдержавших вступительные экзамены в технический вуз, оценку «отлично» получили по математике – 48 человек, по физике – 37, по литературе – 42, по математике или физике – 75, по математике или литературе – 76, по физике или литературе – 66, по всем трем предметам – 4. Сколько абитуриентов получили только одну оценку «отлично»? Ровно два «отлично»? По меньшей мере одно «отлично»?



Решение. Применим круги Эйлера. Через М, Ф, и Л обозначим множества абитуриентов, сдавших на «отлично» соответственно математику, физику или литературу, эти множества по условию имеют соответственно 48, 37 и 42 элемента. Общая часть всех трех множеств имеет 4 элемента. Обозначим через *a, b, c, x, y, z* число абитуриентов, которые получили оценку «отлично» по одному или двум из трех предметов. Приходим к системе:

$$\begin{cases} a+x+y=44, \\ b+x+z=33, \\ c+y+z=38, \\ a+b+x+y+z=71, \\ a+c+x+y+z=72, \\ b+c+x+y+z=62. \end{cases}$$

Нам нужно найти суммы $a+b+c$ и $x+y+z$. Для их нахождения сложим сначала три первых, а затем три последних уравнения системы:

$$\begin{cases} a+b+c=2(x+y+z)=115, \\ 2(a+b+c)+3(x+y+z)=205. \end{cases}$$

Решая систему, находим $a+b+c=65$, $x+y+z=25$. Ответ: 65, 25, 94.

Спасибо за внимание !